1177 $x^y=y^x\ (0<x<y)$ ノ有理数解ニツイテ

遠山　啓（東京工大）

$x^y=y^x\ (0<x<y)$，整数解ヲ求メル問題ガCarmichael ノ Diophantine Analysis, 113頁ニ載ッテ居ル。少シ擴張シテ有理解ヲ求メル問題ヲ解イテ見ヤウ。結果ハスベテノ解ガ

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ y &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}\right\}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

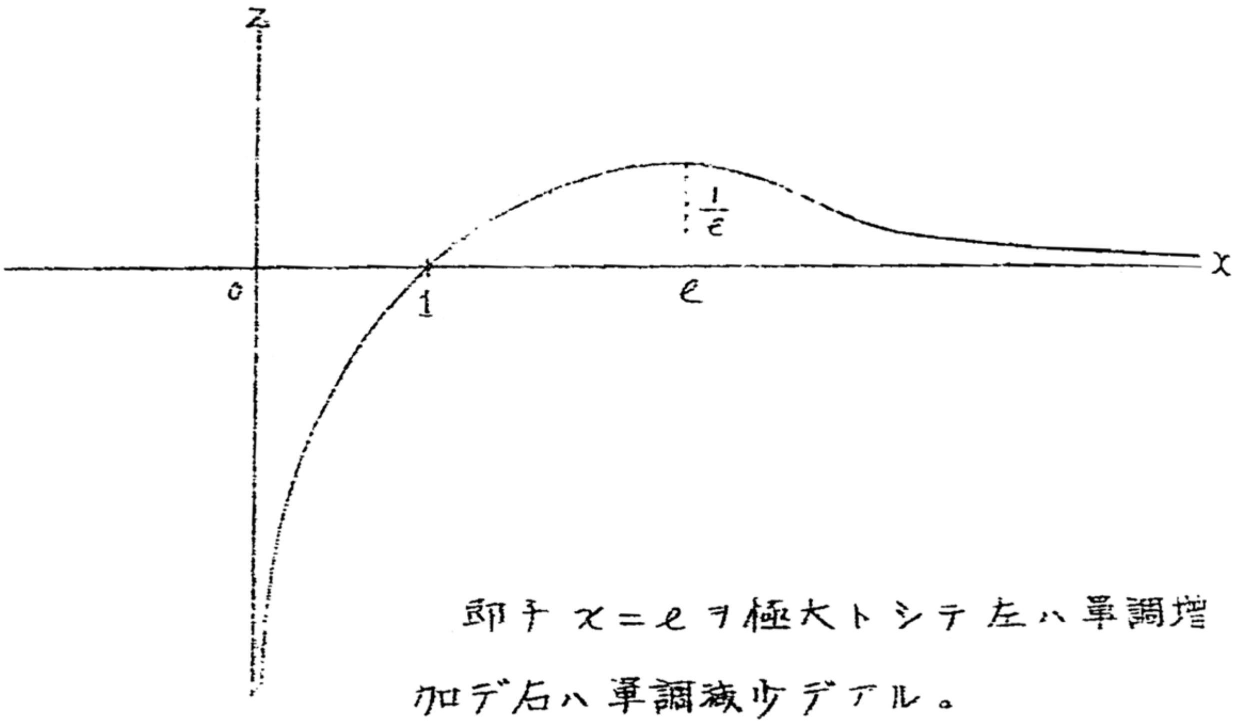
デアリ、証明ハ初等的デ、極メテ簡單ニ出来ル。
先ヅ方程式ノ $\log$ ヲ取ッテ見ルト，

$$\frac{\log x}{x}=\frac{\log y}{y} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

トナル。コノ解ノ性質ヲ見ルタメニ

$$Z=\frac{\log x}{x}$$

ナル曲線ヲ追跡シテ見ルト、次ノヤウニナル。



即チ $x=e$ ヲ極大トシテ左ハ単調増加デ右ハ単調減少デアル。

故ニ(2)ヲ満足スル x, y ハ相互ニ一意的ニ他ヲ決定スル筈デアル

$\frac{y}{x}=\left(1+\frac{1}{t}\right)$ ト置ケバ t モ一意的ニ決定サレル。

之ヲ原方程式ニ代入スルト

$$x^{x(1+\frac{1}{t})}=\left(x\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)^{x}$$

トナルカラ

$$x^{1+\frac{1}{t}}=x\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$x=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$ ヲ得ル。

$y=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}$ ナルコトハ明カデアル。

又，x, y ガ有理数ナルコトカラ、t モ亦有理数デアル。

$$t=\frac{n}{m}\quad (m,n)=1$$

ト置ク。我々ハコヽデ $m=1$ ナルコトヲ証明スレバ充分デアル。若シ $m>1$ トスルト、

$$x=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n+m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$$

之ガ有理数ナル為ニハ

$$\begin{cases} n+m=a^m \\ \quad n=b^m \end{cases}$$

トナル。

$$m=a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots\cdots+b^{m-1})$$

然ルニ右辺ハ明カニ

$$(a-b)(\underbrace{a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots\cdots+b^{m-1}}_{m\text{個}})>m$$

トナル。故ニ $m>1$ トナルコトハ出来ヌ。即チ $m=1$ デナケレバナラヌ。

故ニ $x^y=y^x\ (0<x<y)$ ノ有理数解ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ y&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}\right\}\quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

デ尽サレル。コノ解ガ e ヲ挟ンデ e ニ近ヨルコトモ明カデアラウ。　(終)

(昭和19年5月3日)